平成31年度・入学試験問題(前期)

数　学　(経)

注　意　事　項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 試験開始後，すべての解答用紙に氏名(カタカナ)及び受験番号を記入しなさい。受験番号が正しく記入されていない場合は，採点できないことがあります。また，氏名(カタカナ)及び受験番号以外の文字，数字などは，絶対に記入してはいけません。
3. 答案は解答用紙の各問題番号の欄に記入しなさい。
4. 解答用紙の裏面には何も書いてはいけません。
5. 試験終了後，問題冊子および下書用紙は持ち帰りなさい。

すべての問題について，求める手順をわかりやすく説明すること。

◇M5(417—55)

1. 次の問いに答えよ。

(1) $(x^2-y-1)(x-y+1)(y-1)<0$ を満たす点 (x, y) の領域を図示せよ。

(2) 関数 $f(x)=-x^3+ax^2-11x+5$（a は実数）の $x=-2$ における微分係数は -51 である。このとき，$y=f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

(3) 下の表は，100 点満点で実施した数学と国語のテストの結果をまとめた表である。数学と国語の点数の相関係数が 0.85 のとき，a と b を求めよ。

生徒番号	数学	国語
1	47	50
2	56	53
3	81	60
4	75	71
5	84	81
6	66	a
7	67	65
8	92	75
平均	71	b
分散	196	100

2. 正の実数 x に対して，初項 $\log_3 x$，公比 -3 の等比数列の初項から第 n 項までの和を $S_n(x)$ とする。ただし，n は自然数とする。次の問いに答えよ。

(1) $S_n(x)$ を x と n を用いて表せ。

(2) 関数 $f(x)=\log_3(3x^2-x-1)$ とするとき，不等式 $f(x)>1$ を満たす x の値の範囲を求めよ。

(3) (2) の $f(x)$ に対して，不等式 $S_n(x)>\dfrac{1-3^n\cos n\pi}{12}f(x)$ を満たす x の値の範囲を求めよ。

3. 以下の条件を同時に満たすベクトル $\vec{p}, \vec{q}$ について考える。

① $\dfrac{\vec{p}\cdot\vec{q}}{\vec{p}\cdot\vec{p}}$ は整数　② $\dfrac{(2\vec{p})\cdot(2\vec{q})}{\vec{q}\cdot\vec{q}}$ は整数　③ $\vec{p}\cdot\vec{q} \neq 0$　④ $|\vec{p}| \neq 0, |\vec{q}| \neq 0$

ただし，$\vec{p}\cdot\vec{q}$ は2つのベクトル $\vec{p}$，$\vec{q}$ の内積を表す。次の問いに答えよ。

(1) $\vec{p}$，$\vec{q}$ のなす角を $\theta\ (0 \leqq \theta \leqq \pi)$ とする。θ の値をすべて求めよ。

(2) (1) の各 θ に対して，2つのベクトル $\vec{p}$，$\vec{q}$ の大きさの比をすべて求めよ。

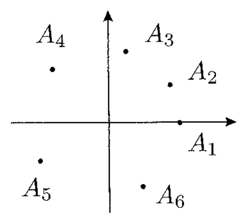
(3) xy 平面上に，原点を始点とするベクトル $\vec{p} = (1, 0)$ および $\vec{q} = (q_1, q_2)\ (q_2 \geqq 0)$ を考える。$\vec{p}$，$\vec{q}$ が上記の条件①から④を同時に満たすとき，ベクトル $\vec{q}$ を xy 平面上にすべて図示せよ。

4. サイコロを使って以下の①から③の操作を行うことで，図 (a) にある xy 平面上の点 $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ のいくつかを線分で結んだ折れ線または1点からなる図形を作る。

① サイコロを投げて出た数字を投げた順番に並べる。ただし，一度出た数字がもう一度出たら，そこでサイコロを投げるのをやめるものとする。できた数字の列を $[i_1, i_2, \cdots, i_n]$ とする。

② $n = 2$ のとき，1点 A_{i_1} からなる図形となる。$n \geqq 3$ のとき，$A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_{n-1}}$ を線分で順次結ぶ。

③ 最後の数字 i_n が i_{n-1} または i_{n-2} と一致するとき，新たな点や線分を加えることなく作図を終了する。それ以外のときは，$A_{i_{n-1}}$ と A_{i_n} を線分で結び作図を終了する。



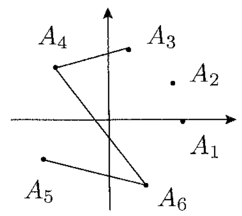
(a)

例えば，$[3, 4, 6, 5, 5]$ や $[3, 4, 6, 5, 6]$ の順で数字が出たときの図形は図 (b) となる。また $[3, 4, 6, 5, 2, 4]$ の順で数字が出たときの図形は図 (c) となる。なお，点 $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ は原点を中心とする同一円周上にあり，それらの座標は

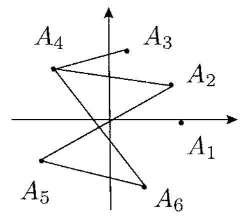
$$A_1 = (1, 0),\quad A_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right),\quad A_3 = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\right),$$

$$A_4 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right),\quad A_5 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right),\quad A_6 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

である。次の問いに答えよ。



(b)



(c)

図

(1) 作図終了後，図形が点 $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ のうち3点を頂点とする三角形となる確率を求めよ。

(2) 作図終了後，図形が点 $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ のうち3点を頂点とする直角三角形となる確率を求めよ。

(3) 作図終了後，図形の中に $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ のいずれかを3頂点とする直角三角形が含まれる確率を求めよ。